Degree two unirational parametrizations over the real field

名古屋大学　大学院多元数理科学研究科　多元数理科学専攻
高木颯斗 (Hayato TAKAGI) *

概要

代数多様体の有理性に関する問題は, 代数幾何学における古典的かつ重要な問題として今もなお盛んに研究されている. 代数多様体が有理的 (rational) であるとは, 射影空間との間に双有理写像が存在することをいい, 単有理的 (unirational) であるとは, 射影空間から支配的な有理写像が存在することをいう. 定義より明らかに有理的ならば単有理的であるが, その逆がどの程度成り立つかについては考察の余地がある. 代数曲線の場合にはこれらの概念は一致し, 代数曲面の場合にも, 基礎体が標数 0 の代数閉体であれば一致するということが, 古くからよく知られている.

本稿では, 基礎体を実数体 $\mathbb{R}$ とした場合の代数曲面の単有理性に関して得られた結果について紹介する. 我々のアプローチは, 実射影平面上の自己双有理変換がなす群 (Cremona 群) の位数 2 の有限部分群の分類 [CMYZ24] を利用したものである. Cremona 群の有限部分群の分類自体も非常に興味深い問題であるため, その紹介もしたい. 本稿の内容は, Brendan Hassett 氏および谷本祥氏との共同研究 [HTT25] に基づく.

1　導入

1.1　代数多様体の有理性問題

代数多様体の有理性に関する問題は, 現在も盛んに研究されている古典的かつ重要なテーマである. 以下では, 本稿で取り上げる主定理に関連する有理性問題の基礎的な事柄をまとめる.

定義 1.1. X を体 k 上の n 次元代数多様体とする.

(1) X が k **有理的** (*k-rational*) であるとは, 射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ と双有理同値であること, すなわち, 射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ との間に k 上で定義された双有理写像が存在することをいう.

(2) X が k **単有理的** (*k-unirational*) であるとは, 射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ からの k 上で定義された支配的有理写像が存在することをいう.

(3) X が**幾何学的に有理的** (*geometrically rational*) であるとは, $X_{\overline{k}} := X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \overline{k}$ が $\overline{k}$ 有理的であることをいう. ただし, $\overline{k}$ は体 k の代数閉包を表す.

定義から, 有理的ならば単有理的であることは明らかであるため, その逆がどの程度成り立つかということが自然な疑問として現れる. $n = 1$ の場合, すなわち, 曲線の場合, これらは一致することが知られている.

* E-mail:hayato.takagi.c6@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1.2 (J. Lüroth)**.** 任意の体 k について, k 単有理的な曲線は, k 有理的である.

この著名な結果から, 有理性と単有理性との差異を考える問題は, Lüroth の問題とも呼ばれる. 次に $n=2$ の場合, すなわち, 曲面の場合にも, これらは一致することが示された. ただし, この場合には基礎体について, 標数 0 の代数閉体であることを課す必要がある.

定理 1.3 (G. Castelnuovo)**.** k を標数 0 の代数閉体とする. このとき, k 単有理的な曲面は, k 有理的である.

$n \geq 3$ の場合については, k が代数閉体であったとしても, k 単有理的かつ k 有理的でない代数多様体の例がいくつか知られている. また, 本稿の主題は実数体 $\mathbb{R}$ を基礎体とした曲面の単有理性についてであるが, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で有理的であったとしても, $\mathbb{R}$ 上では有理的でないといった現象は容易に起こりうる. 例えば, 二次曲線 $Q_{3,0} \coloneqq \{x^2+y^2+z^2=0\} \subset \mathbb{P}^2$ は, $\mathbb{C}$ 上では射影直線 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ に同型であるが, 実点を持たないため, $\mathbb{R}$ 上ではそうはなり得ない.

1.2 Cremona 群とその有限部分群の分類

適当な数学的対象に対して, その自己同型群を考えることはしばしば行われるが, 代数多様体に関しては, 自己同型群に加え, その上の自己双有理写像がなす群を考えることも双有理幾何学の観点から重要である. 最も基本的な代数多様体である射影空間の上の自己双有理写像がなす群は Cremona 群と呼ばれ, 重要な研究対象と認識されている.

定義 1.4. 射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ 上の自己双有理写像がなす群を $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ や $\mathrm{Cr}_n(k)$ で表し, **Cremona 群**と呼ぶ.

自己同型射は自己双有理写像であるから, Cremona 群は自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$ を部分群に持つ. 特に, $n=1$ の場合, すなわち, 射影直線の場合は, 任意の自己双有理写像は一意的に自己同型射に延長されるため, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1_k) \simeq \mathrm{PGL}_2(k)$ となる. したがって, Cremona 群の研究で本質的なのは $n \geq 2$ の場合であるが, $n \geq 3$ の場合に知られていることはかなり限られている.

以下では本稿の主題に戻り, $n=2$ の場合を考える. Cremona 群自体は非常に大きく複雑な群であるため, その構造を知るための一つの方向性として, 有限部分群を分類するということが行われてきた. その現代的手法として以下の観察が重要である. Cremona 群の有限部分群 $G \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ が与えられたとする. このとき, ある滑らかな k 有理的射影曲面 X, 単射群準同型 $i\colon G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(X)$, および双有理写像 $\psi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2_k$ が存在し, $G = \psi \circ i(G) \circ \psi^{-1}$ が成り立つ. つまり, これは G を適当な有理曲面上の正則な作用として実現することができることを意味している. これにより, Cremona 群 $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ の有限部分群 G たちの共役類全体がなす集合と滑らかな k 有理的 G 曲面 (X, G) の双有理同値類全体がなす集合との間の一対一対応が得られる. 後者は, G 同変な極小モデル理論を用いることにより, ある程度わかりやすい構造を持った曲面に帰着させることができるため, この対応を通じて Cremona 群の有限部分群を分類することができるようになる.

基礎体が代数閉体である場合の射影平面の Cremona 群の有限部分群の分類は, 様々な研究を経て Dolgachev-Iskovskikh([DI09]) により完成した. 一方で, 基礎体が代数閉体でない場合に知られてい

ることは少なく, 近年になって Cheltsov-Mangolte-Yasinsky-Zimmermann([CMYZ24]) によって, 位数 2 の有限部分群の分類が得られた. 本研究は, この分類を実代数曲面の単有理性の研究に応用したものである.

2 主定理

本節では, 主定理とその証明の概要を述べる. 以下が主定理の主張である.

定理 2.1 (主定理)**.** S を滑らかな実射影曲面であって, 幾何学的に有理的なものとする. このとき, S が次数 2 の単有理的パラメータ付けを持つ, すなわち, 射影空間 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ から S への次数 2 の支配的有理写像が存在するための必要十分条件は, S が有理的であるか, 実点を持つ極小コニック束に双有理同値であることである.

ここから主定理の証明のアイデアを述べる. まず前提として, S を滑らかな実射影曲面であって, 幾何学的に有理的なものとすると, そのような曲面の双有理モデルは完全に分類されている.

定理 2.2 ([Kol97])**.** S を滑らかな実射影曲面であって, 幾何学的に有理的なものとする. このとき, S は以下のクラスのいずれかちょうど一つの曲面と $\mathbb{R}$ 上双有理同値である:

(1) $Q_{3,0} \times \mathbb{P}^1$. この場合, $S(\mathbb{R}) = \emptyset$.

(2) $\mathbb{P}^2$. この場合, $S(\mathbb{R})$ は連結.

(3_m) $2m$ ($m \geq 2$) 個の特異ファイバーを持つ極小コニック束. この場合, $S(\mathbb{R})$ は m 個の連結成分を持つ.

(3) 次数 2 かつ Picard 数 1 のの極小 del Pezzo 曲面. この場合, $S(\mathbb{R})$ は 4 つの連結成分を持つ.

(4) 次数 1 かつ Picard 数 1 のの極小 del Pezzo 曲面. この場合, $S(\mathbb{R})$ は 5 つの連結成分を持つ.

S が次数 2 の単有理的パラメータ付け $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow S$ を持つとする. この写像の不確定点を除去し, Stein 分解をとることで, 次数 2 の有限射 $X' \to S$ を得る. ただし, X' は適当な正規有理射影曲面である. このとき, X' 上に対合 τ' が誘導される. 特異点を同変的に除去し, 同変極小モデル理論を適用することで, 滑らかな有理射影曲面 X とその上の対合 τ の組 (X, τ) を得る. このような組は, まさに実射影平面上の位数 2 の有限部分群を調べた [CMYZ24] で分類されているものである. その分類に現れる各組について, その商 X/τ を計算し, その双有理モデルが何になるかを決定することで, 所望の主張を得る. 今回の場合であれば, 有理的であるか極小コニック束に双有理同値であるかのいずれかが成り立つことを示せば良いことになる.

簡単なケースを具体例として示しておく.

補題 2.3. S を次数 2 の有理 del Pezzo 曲面とし, τ を S の Geiser 対合とする. このとき, 商 S/τ は有理的である.

証明. 次数 2 の del Pezzo 曲面の Geiser 対合 τ とは, $-K_S$ が定める二重被覆 $S \to \mathbb{P}^2$ に付随する対合である. したがって, $S/\tau \simeq \mathbb{P}^2$ が成り立つ. □

補題 2.4. S を次数 1 の有理 del Pezzo 曲面とし, τ を S の Bertini 対合とする. このとき, 商 S/τ

は有理的である.

証明. 次数 1 の del Pezzo 曲面の Bertini 対合 τ とは, $-2K_S$ が定める二重被覆 $S \to Q \subset \mathbb{P}^3$ に付随する対合である. ここで, Q は幾何学的に有理的な二次錐である. S が有理的であることから, Q は滑らかな実点を持つため, 有理的となる. したがって, $S/\tau \simeq Q$ は有理的である. □

以上のような議論を, [CMYZ24] に現れるすべての組について行うことで, 主定理の主張を示すことができた.

参考文献

[CMYZ24] I. Cheltsov, F. Mangolte, E. Yasinsky, and S. Zimmermann, *Birational involutions of the real projective palane*, J. Eur. Math. Soc. 2024

[DI09] I. Dolgachev and V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Progr. Math., vol. **269**, 2009

[HTT25] B. Hassett, H. Takagi, and S. Tanimoto, *Degree two unirational parametrizations over the real field*, arXiv:2509.08615, 2025

[Kol97] J. Kollár, *Real algebraic surfaces*, arXiv:alg-geom/9712003, 1997